AXIOMAS

Axioma 1. Cualquiera que sea el suceso S, $P[S] \geq 0$.

Axioma 2. Si dos sucesos son incompatibles, la probabilidad de su unión es igual a la suma de sus probabilidades:

$$A \cap B = \varnothing \Rightarrow P[A \cup B] = P[A] + P[B]$$

Axioma 3. La probabilidad total es 1: $P[E] = 1$

Teorema 1

Si A es un suceso y A' es su contrario, $P[A'] = 1 - P[A]$.

Demostración

Por ser sucesos contrarios, $A \cap A' = \varnothing$. Y, por lo mismo, $A \cup A' = E$.

Según el axioma 2, como $A \cap A' = \varnothing \Rightarrow P[A \cup A'] = P[A] + P[A']$.

Según el axioma 3, la probabilidad total es 1; es decir:

$$P[E] = P[A \cup A'] = P[A] + P[A'] = 1$$

Y de esta última igualdad se deduce, inmediatamente, que $P[A'] = 1 - P[A]$.

Teorema 2

La probabilidad del suceso vacío o suceso imposible es $P[\varnothing] = 0$.

Demostración

El suceso contrario de $\varnothing$ es el suceso seguro, E. Así, teniendo en cuenta el teorema 1:

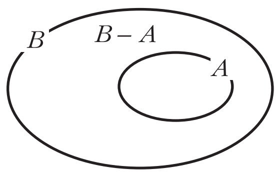
$$P[\varnothing] = 1 - P[\varnothing'] = 1 - P[E]$$

Y aplicando el axioma 3, $P[\varnothing] = 1 - P[E] = 1 - 1 = 0$

Teorema 3

Si dos sucesos A y B son tales que $A \subset B$, entonces $P[B] = P[A] + P[B - A]$.

Demostración



Si $A \subset B$, entonces $B = A \cup (B - A)$.

Los sucesos A y $B - A$ son, evidentemente, incompatibles, $A \cap (B - A) = \varnothing$.

Por tanto, teniendo en cuenta el axioma 2:

$$P[B] = P[A] + P[B - A]$$

Teorema 4

Si dos sucesos A y B son tales que $A \subset B$, entonces $P[A] \le P[B]$.

Demostración

Puesto que $A \subset B$, aplicando el teorema 3 anterior:

$$P[B] = P[A] + P[B - A] \;\rightarrow\; P[B] - P[A] = P[B - A]$$

Teniendo en cuenta el axioma 1, $P[B - A] \ge 0$. Es decir, $P[B] - P[A] \ge 0 \;\rightarrow\; P[B] \ge P[A]$

Teorema 5

Si $A_1, A_2, \ldots, A_k$, son incompatibles dos a dos, entonces:

$$P[A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k] = P[A_1] + P[A_2] + \ldots + P[A_k]$$

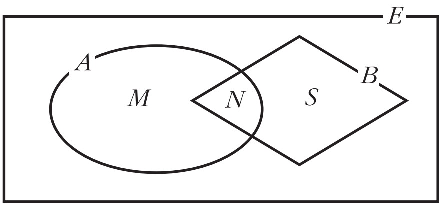
Demostración

Es consecuencia inmediata del axioma 2 y de las propiedades asociativas de la unión de conjuntos y de la adición de números reales.

Teorema 6

Dados dos sucesos cualesquiera A y B, $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$.

Demostración



$A = M \cup N$

$B = N \cup S$

$A \cup B = M \cup N \cup S$

$A \cap B = N$

$$\left.\begin{array}{l} P[A] = P[M] + P[N] \\ P[B] = P[N] + P[S] \end{array}\right\} \quad P[A] + P[B] = P[M] + P[N] + P[N] + P[S] \ (*)$$

$$P[A \cup B] = P[M \cup N \cup S] = P[M] + P[N] + P[S] \ (**)$$

Comparando las igualdades (*) y (**): $P[A] + P[B] - P[N] = P[A \cup B]$

Con lo que, si tenemos en cuenta que $N = A \cap B$, se tiene la igualdad buscada.

Teorema 7

Si el espacio muestral E es finito y un suceso es $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, entonces:

$$P[S] = P[x_1] + P[x_2] + \ldots + P[x_k]$$

Demostración

Este teorema es consecuencia inmediata del terorema 5.